多重ゼータ値からアソシエータへ
From multiple zeta values to Associators

山口　隼跳アントニオ

概要

本稿は、多重ゼータ値と結合子 (アソシエータ) の関連について簡潔に記述することを目的に執筆された。多重ゼータ値に関する日本語の優れた文献は両手で数えきれないほど存在するが、多重ゼータ値の基礎的な話から一般のアソシエータの簡単な話題について単体で触れている日本語の文献は少ないように思える。本稿はそうしたギャップを埋めることを意識してつくられているが、その性質から幾らかの記述を他の優れた文献に委ねている。また、筆者の知識不足のためアソシエータ本来の幾何的な側面については一切触れることができない。適時参考文献から必要な事柄を補完することを勧める。

目次

1　Hoffman 代数　2
1.1　調和積とシャッフル積 3
2　多重ゼータ値の基本的な話題　4
3　アソシエータ関係式　6
謝辞　9
参考文献　10

$$\begin{tikzcd}
 & & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[drr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[urr, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C}\otimes\mathrm{id}_D"'] & & & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
 & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"'] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[ur, "\mathrm{id}_A\otimes\alpha_{B,C,D}"'] &
\end{tikzcd}$$

多重ゼータ値

多重ゼータ値 (Multiple zeta values, MZVs) とは、1 以上の整数 $k_1, \cdots, k_r, k_r \geqq 2$ に対して

$$\zeta(k_1, \cdots, k_r) = \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

によって定義される実数である。引数が一つの時はよく知られたリーマンゼータ値となる。本節では多重ゼータ値の基本的な代数的取り扱いやよく知られた結果について述べる。

1 Hoffman 代数

Hoffman 代数とはしかるべき構造を備えた二変数非可換多項式環のことであるが、それは多重ゼータ値を意識して作られている。まずは簡単なインデックスの定義から始めよう。

定義 1.1 (インデックス)**. インデックス**とは、$\bigoplus_{r=0} \mathbb{Z}^r_{\geqq 1}$ の元のことである。
ただし $r = 0$ のときは一元集合 $\{\varnothing\}$ のこととする。

つまるところ $\varnothing, (1), (2, 3), (3, 3, 5, 6, 7, 1)$ などはインデックスということになる。また、末尾が 2 以上のインデックスを**許容インデックス**とか admissible なインデックスという。便宜上 $\varnothing$ も許容インデックスと考え、**空インデックス**と呼ぶ。
今後インデックスを表す記号として $\mathbf{k}.\mathbf{l}$ などを用いることにする。次にインデックスの重さと深さを定義しよう。

定義 1.2. インデックスの要素の数を**深さ (depth)** といい、$\mathrm{dp}(\mathbf{k})$ と表す。また、インデックスの要素の和を**重さ (Weight)** といい、$\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ で表す。空インデックスの深さと重さはともに 0 とする。

全てのインデックスが張る $\mathbb{Q}$ 自由線形空間やその部分線形空間である許容インデックスのみが張る空間をそれぞれ $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}'_0$ と表し、$\mathbb{Q}$ 線形写像 $\zeta : \mathcal{R}'_0 \to \mathbb{R}$ を $(k_1, \cdots, k_r) \mapsto \zeta(k_1, \cdots, k_r)$ で定める。ただし $\zeta(\varnothing) \coloneqq 1$ とする。
インデックスの準備が終わったところで、Hoffman 代数の構成を行う。X_0 と X_1 の連結で表された文字列を**語 (word)** という。1 も word として扱い、連結に関する単位元とする。
次に、有理係数の二変数非可換多項式環を $\mathfrak{H} \coloneqq \mathbb{Q}\langle X_0, X_1\rangle$ とし、その部分空間を $\mathfrak{H}^1 \coloneqq \mathbb{Q} + X_1\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}^0 \coloneqq \mathbb{Q} + X_1\mathfrak{H}X_0$ とする。$\mathfrak{H}^0 \subset \mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{H}$ に注意。このとき、$X_1X_0^{k_1-1} \cdots X_1X_0^{k_r-1} \mapsto (k_1, \cdots, k_r)$ なる $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\mathfrak{H}^1 \to \mathcal{R}_0$(ついでに $\mathfrak{H}^0 \to \mathcal{R}'_0$) は線形同型を与える。ただし $1 \in \mathfrak{H}^1(\mathrm{resp}.\mathfrak{H}^0) \mapsto \varnothing \in \mathcal{R}_0(\mathrm{resp}.\mathcal{R}'_0)$ とする。これを **word とインデックスの対応**などという。この同一視によって word とインデックスは区別なく扱われる。また、この対応は線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}, Z(X_1X_0^{k_1-1} \cdots X_1X_0^{k_r-1}) = \zeta(k_1, \cdots, k_r)$ を誘導する。

ノート 1.3. word の重さや深さは対応するインデックスのそれとして考えるのが妥当だが、重さを word の文字数、深さを X_1 の含まれる数として考えることができるので、逆にこれを重さや深さの定義としてもよい。実際後の議論ではそのように一般化した重さや深さの概念が使われる。

1.1　調和積とシャッフル積

$\mathfrak{H}^1$ 上 $\mathbb{Q}$ 双線形な積 $*$ を次の規則で定める。

$$WX_k * W'X_l = (W * W'X_l)X_k + (WX_k * W')X_l + (W * W')X_{k+l}$$
$$W * 1 = 1 * W = W$$

$W, W' \in \mathfrak{H}^1$ で、$X_i = X_1 X_0^{i-1}$ とした。この積構造を**調和積**といい、調和積を備えた $\mathfrak{H}^1$ や $\mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}^1_*, \mathfrak{H}^0_*$ と書く。同様に、$\mathfrak{H}$ 上 $\mathbb{Q}$ 双線形な積 ξ を次の規則で定める。

$$WX_i \,\text{ш}\, W'X_j = (WX_i \,\text{ш}\, W')X_j + (W \,\text{ш}\, W'X_j)X_i$$
$$1 \,\text{ш}\, W = W \,\text{ш}\, 1 = W$$

$W, W' \in \mathfrak{H}$ で、$i,j \in \{0, 1\}$ とした。この積構造は**シャッフル積**といい、シャッフル積を備えた $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}_{\text{ш}}, \mathfrak{H}^1_{\text{ш}}, \mathfrak{H}^0_{\text{ш}}$ と書く。Hoffman [Ho] によってこれらの積は結合的かつ可換であり、したがって $\mathfrak{H}_{\text{ш}}, \mathfrak{H}^1_*$ などらが $\mathbb{Q}$-代数をなすことが示されている。これらの代数構造は調和代数やシャッフル代数と呼ばれることがあるが、まとめて Hoffman 代数と呼ぶ。なお、word とインデックスの対応からこれらの積をインデックスの世界に持ちこむことができるので、今後 $\mathbf{k} * \mathbf{l}$ や $\mathbf{k} \,\text{ш}\, \mathbf{l}$ などというように書くことがある。

例 1.4.

$$(2) * (2) = 2(2, 2) + (4)$$
$$(2) \,\text{ш}\, (2) = 2(2, 2) + 4(1, 3)$$

ノート 1.5. 本稿ではインデックスや word の記法として一部で右向きと呼ばれるものを採用している。これは多重ゼータ値の定義式の不等号の向きからそう呼ばれているものだが、**著者によってはインデックスや word の向きが逆**になっていることがある ($(1, 2)$ が $(2, 1)$ に、X_1X_0 が X_0X_1 などというように)。また更にややこしいことに、**同じ文献でもインデックスと word の向きがそれぞれ逆**になっているものがあり、本稿も途中から word を反転させてその形態を取る。そのようなことは特にアソシエータに関連する文献で起こりがちだが、それはアソシエータを扱うときに左向きの方が都合が良いという事情によるものである。以降 word を反転させるときはその旨を宣言する。

Hoffman 代数の基本的だが重要な定理として次の二つが挙げられる。

定理 1.6 (Hoffman [Ho])**.** 任意の $W \in \mathfrak{H}^1$ に対して、次のような $W_i \in \mathfrak{H}^0$ が存在する。

$$W = \sum_{i=0}^{n} W_i * X_1^{*i}$$

定理 1.7. 任意の $W \in \mathfrak{H}$ に対して、次のような $W_{ij} \in \mathfrak{H}^0$ が存在する。

$$W = \sum_{\substack{0 \leqq i \leqq n \\ 0 \leqq j \leqq m}} X_0^{\text{ш} j} \,\text{ш}\, W_{ij} \,\text{ш}\, X_1^{\text{ш} i}$$

それぞれの “定数項” を $\mathrm{reg}_*(\mathrm{W}), \mathrm{reg}_{\text{ш}}(\mathrm{W})$ と表すことがある。これらの定理は帰納法で比較的簡単に示すことができる。(定理 1.7 に関しては、まずインデックスと対応する word が $\mathfrak{H}^0$ 係数の X_1 に関する ш-多項式で書けることを証明し、対称性から X_0 でも分解できることを示すと楽だと思われる。)

2　多重ゼータ値の基本的な話題

$\mathcal{Z}_k$ を重さ k の多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ 線形空間とする。[*1]

予想 2.1 (次元予想:Zagier [Za])**.**

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\dim \mathcal{Z}_k)t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}$$

が成り立つだろう。すなわち、数列 d_k を $d_0 = d_2 = 1, d_1 = 0$ で $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ によって定めれば

$$\dim \mathcal{Z}_k = d_k$$

が成り立つだろう。

この予想の片側の不等式は既に示されている。

定理 2.2 (Goncharov [Go], Terasoma [Te], Deligne–Goncharov [DG])**.**

$$\dim \mathcal{Z}_k \leqq d_k$$

d_k は予想次元などと呼ばれる。この予想や定理の言明の一部は、多重ゼータ値の間に次元を予想次元まで落とすような数多の線形関係式が存在するということであり、実際次元予想を裏付けるに足る多くの関係式族が様々な経緯で発見されている。ここでいくつか例をあげる。

定理 2.3 (双対性, Duality)**.** 許容インデックスを $\mathbf{k} = (\underbrace{1,\cdots,1}_{a_1-1}, b_1+1, \cdots, \underbrace{1,\cdots,1}_{a_s-1}, b_s+1)$ と表したとき、$\mathbf{k}$ の双対インデックスを $\mathbf{k}^\dagger \coloneqq (\underbrace{1,\cdots,1}_{b_s-1}, a_s+1, \cdots, \underbrace{1,\cdots,1}_{b_1-1}, a_1+1)$ で定める。このとき、

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(\mathbf{k}^\dagger)$$

Duality の証明は反復積分表示を変数変換することで簡単に行える。

定理 2.4 (多重ゼータ値の反復積分表示)**.**

$$\zeta(k_1,\cdots,k_r) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\cdots\cdots\frac{dt}{1-t}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_r-1}$$

が成り立つ。ここで反復積分は $\int_a^b \omega_1\cdots\omega_n \coloneqq \int_a^b(\int_a^x \omega_1\cdots\omega_{n-1})\omega_n(x)$ によって再帰的に定義されている。

Duality は word の並びを逆にして X_0 と X_1 を入れ替えた MZVs が等しいと言うこともできる。余談だが、[S] にて連結和法という手法を用いて Duality やそれの大幅な一般化である大野関係式を反復積分表示に依存しない級数変形で証明する方法について詳しく解説されている。

定理 2.5 (調和関係式)**.** 許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$$

[*1] 重さの異なる線形関係式が存在すると信じているのなら、重さ k の許容インデックスからなる線形空間の像だと思うとよい。これは直和予想と呼ばれている。

定理 2.6 (シャッフル関係式). 許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k} ш \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k})\zeta(\mathbf{l})$$

定理 2.7 (有限複シャッフル関係式). 許容インデックス $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ に対して

$$\zeta(\mathbf{k} * \mathbf{l}) = \zeta(\mathbf{k} ш \mathbf{l})$$

調和積とシャッフル積はそれぞれ多重ゼータ値の級数表示と反復積分表示に入る積構造であり、これら二つを比較することで非自明な関係式が得られるというのが有限複シャッフル関係式である。有限複シャッフル関係式は広い関係式だが二つのインデックスがともに許容的でなければならず、Duality の最も簡単な例である $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ などが含まれていない。これの片方を一般のインデックスにまで拡張したものが正規化複シャッフル関係式である。

定理 2.8 ([IKZ], 正規化複シャッフル関係式, Double shuffle relation). 任意の word $W \in \mathfrak{H}$ に対して線形写像 $\zeta^{ш} : \mathfrak{H} \to \mathbb{R}$ を $\zeta^{ш}(W) := Z(\mathrm{reg}_{ш}(\mathrm{W}))$ で定める。[*2] このとき、word $W \in \mathfrak{H}^1, W' \in \mathfrak{H}^0$ に対して

$$\zeta^{ш}(W * W' - W ш W) = 0$$

正規化複シャッフル関係式は非常に広範な関係式であり、次が予想されている。

予想 2.9. 正規化複シャッフル関係式は多重ゼータ値の全ての $\mathbb{Q}$ 線形関係式を含んでいるだろう。また、正規化複シャッフル関係式のみによって $\mathcal{Z}_k$ の次元を予想次元まで落とすことができるだろう。[*3]

アソシエータ

アソシエータは多重ゼータ値と関連が深い。特に Drinfel'd associator は多重ゼータ値の非常に良い母関数であり、アソシエータ関係式は正規化複シャッフル関係式すら従わせてしまう強力なものである。本節では Drinfel'd associator のアソシエータ関係式がどのように証明されるか、アソシエータはどのような概念に由来するのかということではなく、多重ゼータ値の視点から見たアソシエータがどのように興味深いかに焦点を当てる。また、本節よりインデックスの向きは変わらず **word の向きを逆にする**。つまり、$X_0^{k_r-1}X_1 \cdots X_0^{k_1-1}X_1 \mapsto (k_1, \cdots, k_r)$ となりシャッフル積の定義は

$$X_iW ш X_jW' = X_j(X_iW ш W') + X_i(W ш X_jW')$$

$$1 ш W = W ш 1 = W$$

となる。(もっとも、シャッフル積の定義の向きはどちらでもいいのだが)
準備として、今後 k は標数 0 の体を表すとし $\bar{k}$ をその代数閉包とする。$k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ で k-係数の二変数非可換冪級数環を表す。$\varphi \in k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ と word W に対して $Z_\varphi(W)$ で冪級数 φ の W での係数を表すとする。

---

*2 $\zeta^{ш}(W)$ はシャッフル正規化多重ゼータ値と呼ばれ、$\mathfrak{H}$ 上でシャッフル関係式を満たしている。また、この定理では不要な $\mathfrak{H}$ まで定義を拡張しているのは、後にアソシエータを扱う上で使用するという事情による。

*3 この 2 つの予想は同値ではないどころか独立な主張であることに注意すべきである。

3 アソシエータ関係式

定義 3.1. 体 k 上の結合子 (アソシエータ) とは、$(\mu, \varphi) \in k \times k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ であって次の関係式を満たすもののことである。

commutator group-like 性:

$$\Delta(\varphi) = \varphi \otimes \varphi$$

$$\varphi(0,0) = 1, \quad Z_\varphi(X_0) = Z_\varphi(X_1) = 0$$

2-cycle relation:

$$\varphi(X_0, X_1)\varphi(X_1, X_0) = 1$$

3-cycle relation: $X_0 + X_1 + X_\infty = 0$,

$$e^{\frac{\mu}{2}X_0}\varphi(X_\infty, X_0)e^{\frac{\mu}{2}X_\infty}\varphi(X_1, X_\infty)e^{\frac{\mu}{2}X_1}\varphi(X_0, X_1) = 1$$

5-cycle relation:

$$\varphi(X_{12}, X_{23})\varphi(X_{34}, X_{45})\varphi(X_{51}, X_{12})\varphi(X_{23}, X_{34})\varphi(X_{45}, X_{51}) = 1$$

ただし $\Delta : k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle \to k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle \otimes k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ は X_0, X_1 に対して

$$\Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$$

で定まる k-代数準同型。また変数の族 $X_{ij}, 0 \leqq i, j \leqq 5$ は次の条件を満たす。任意の i, j, k, l に対して、$X_{ii} = 0, X_{ij} = X_{ji}, \sum_{j=1}^{5} X_{ij} = 0$, 相異なる i, j, k, l に対して $X_{ij}X_{kl} = X_{kl}X_{ij}$

これらの関係式をアソシエータ関係式と呼ぶ。アソシエータ関係式には別の表示があるが、同値性は [F2] に詳しい。次の定理はアソシエータが存在することを保証するものである。

定理 3.2 (Drinfel'd [Dr])**.** k を任意の標数 0 の体とする。このとき、任意の $\mu \in k$ に対して (μ, φ) がアソシエータをなすような $\varphi \in k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ が常に存在する。

アソシエータの代表例は次の Drinfel'd associator である。

定理 3.3 (Drinfel'd [Dr])**.** $\zeta^{ш}(W)$ を定理 2.8 で定義したもの (を左向きでみたもの) とする。このとき

$$\Phi_{KZ}(X_0, X_1) = \sum_{W:\text{word}} (-1)^{\mathrm{dep}(W)}\zeta^{ш}(W)W$$

は $\mathbb{C}$ 上で $\mu = 2\pi i$ のアソシエータをなす。[*4]

Drinfel'd associator のアソシエータ関係式の証明については [Ha],[OK] などの日本語の文献があるためそちらを参照されたい。[F5, Proposition 3.43] には係数に言及せず group-like 性[*5]を証明している記述がある。さて、アソシエータ関係式への理解を深めるため、group-like 性に着目してみよう。実は次のことが簡単にわかる。

[*4] 実際のところ、Drinfel'd が KZ 方程式の基本解の接続として Drinfel'd associator を導入し、その後 Le-Murakami が係数を明示的に多重ゼータ値で書き下せることを証明したというのが歴史的な流れのようだ。

[*5] commutator group-like 性から 1 次の係数が 0 になることを省いた条件

定理 3.4. [*6]任意の $\varphi=\sum_{W:\mathrm{word}} Z_\varphi(W)W \in k\langle\langle X_0,X_1\rangle\rangle$ に対して[*7]、

$$\Delta(\varphi)=\sum_{A,B:\mathrm{word}} Z_\varphi(A ш B)A\otimes B$$

Proof. word A,B,W に対して $A ш B=\sum_{\substack{W:\mathrm{word}\\ W\in\mathrm{sh}(A,B)}} W, \Delta(W)=\sum_{\substack{A,B:\mathrm{word}\\ (A,B)\in f(W)}} A\otimes B$ となるように $\mathrm{sh}(A,B)$ と $f(W)$ を置く。$\mathrm{sh}(A,B)$ は A と B のシャッフル積を明示的に書き下しただけのもので、A と B を並びを保ったまま混ぜ合わせる方法を重複込みで保存したものになる。$f(W)$ は W を二通りの word に並びを保ったまま分解する方法を重複度込みで保存したものとなる。

例 3.5. $f(X_0)=\{|(1,X_0),(X_0,1)|\}, f(X_1^2)=\{|(1,X_1^2),(X_1^2,1),(X_1,X_1),(X_1,X_1)|\}$,
$f(X_0X_1)=\{|(1,X_0X_1),(X_0,X_1),(X_1,X_0),(X_0X_1,1),|\}$

$$\Delta(\varphi)=\sum_{W:\mathrm{word}} Z_\varphi(W)\Delta(W)=\sum_{W:\mathrm{word}}\sum_{\substack{A,B:\mathrm{word}\\ (A,B)\in f(W)}} Z_\varphi(W)A\otimes B$$

$$=\sum_{A,B:\mathrm{word}}\Bigg(\sum_{\substack{W:\mathrm{word}\\ (A,B)\in f(W)}} Z_\varphi(W)\Bigg)A\otimes B$$

証明すべきは $W\in\mathrm{sh}(A,B) \iff (A,B)\in f(W)$ に帰着するが、注意深く観察すれば明らかである。 □

よって、次のことがわかる。

定理 3.6. 任意の $\varphi\in\sum_{W:\mathrm{word}} Z_\varphi(W)W \in k\langle\langle X_0,X_1\rangle\rangle$, word A,B に対して、

$$\Delta(\varphi)=\varphi\otimes\varphi \iff Z_\varphi(A ш B)=Z_\varphi(A)Z_\varphi(B)$$

つまり、group-like 性とは、多重ゼータ値の見地からすれば係数がシャッフル関係式を満たすということに他ならないのである。では、一次の係数が 0 であるという commutator group-like 性は何を主張しているのだろうか？ group-like な冪級数 φ の係数 $Z_\varphi(W)$ は定理 1.7 によって次のような表示が一意的に存在する。[*8]

$$Z_\varphi(W)=\sum_{\substack{0\leqq i\leqq n\\ 0\leqq j\leqq m}} Z_\varphi(X_1^{ш i} ш W_{ij} ш X_0^{ш j})=\sum_{\substack{0\leqq i\leqq n\\ 0\leqq j\leqq m}} Z_\varphi(X_1)^i Z_\varphi(W_{ij})Z_\varphi(X_0)^j$$

このとき、もし $Z_\varphi(X_0)=Z_\varphi(X_1)=0$ が成り立っているならば、ほとんどの項が消滅し

$$Z_\varphi(W)=Z_\varphi(\mathrm{reg}_ш(\mathrm{W}))$$

となる。これは、許容的な word の係数 $Z_\varphi(X_0^{k_r-1}X_1\cdots X_0^{k_1-1}X_1)$ によって全ての係数を記述できるということで、すなわち commutator group-like 性とは、係数がシャッフル関係式を満たしシャッフル正規化多重ゼータ値のように正規化操作が行えることを意味する。ちなみに、逆に許容的な word で定義されたシャッフル関係式を満たす対象をシャッフル関係式を保つように一般の word に拡張するとき、X_0 と X_1 での値を 0

[*6] 証明は [Ha],[Ta] に同値なものが記述されているが、原典は見つからなかった。
[*7] ただし、Z_φ を線形写像と見る。
[*8] 逆向きになっていることに注意

と定めればそのような拡張は一通りしかない。今までの議論と Drinfel'd associator の係数を見比べれば、アソシエータの一部の係数に次のような名前をつけたくなるだろう。

$$\zeta_\varphi(k_1,\cdots,k_r) := (-1)^{\mathrm{dep}(W)} Z_\varphi(X_0^{k_r-1}X_1\cdots X_0^{k_1-1}X_1)$$

何もこれは早とちりではなく、もっとより強い意味でアソシエータの係数を多重ゼータ値のアナロジーだと思える。2-cycle relation を見てみよう。非可換冪級数環に入る Hopf 代数構造 [GF, Example 3.67] より group-like な冪級数の逆元を次のように表示できる。

$$\varphi(X_0,X_1)^{-1} = \Big(\sum_{W:\mathrm{word}} Z_\varphi(W)W\Big)^{-1} = \sum_{W:\mathrm{word}} (-1)^{\mathrm{wt}(W)} Z_\varphi(W)\overleftarrow{W}$$

ここで $\overleftarrow{W}$ は W の綴りを逆にしたもの。また 2-cycle relation より $\varphi(X_0,X_1)^{-1} = \varphi(X_1,X_0)$ であったから、係数を比較すれば次がわかる。ただし τ は $\tau(X_0)=X_1, \tau(X_1)=X_0$ を満たす自己準同型とする。

$$(-1)^{\mathrm{dep}(\tau(\overleftarrow{W}))} Z_\varphi(\tau(\overleftarrow{W})) = (-1)^{\mathrm{dep}(W)} Z_\varphi(W)$$

これは定理 2.3 の Duality そのものであり、実際には次が成り立つ。

定理 3.7. $\varphi \in k\langle\langle X_0,X_1\rangle\rangle$ が group-like ならば、2-cycle relation を満たすことと係数が Duality を満たすことは同値である。

ここまでくれば、残り 2 つの条件も係数を多重ゼータ値たらしめる様なものであると期待していいだろう。実際、3-cycle relation は幾らかの線形関係式と特殊値の情報を与える。

定理 3.8 (Li [L, Theorem 4.5])**.** group-like な $\varphi \in k\langle\langle X_0,X_1\rangle\rangle$ が 3-cycle relation を満たすとき、次のような特殊値の公式が成り立つ。[*9]ただし B_n は $x/(e^x-1) = \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n$ で定義される n 番目のベルヌーイ数。

$$Z_\varphi(X_0X_1) = \frac{\mu^2}{24}$$

$$Z_\varphi(X_0^{2n-1}X_1) = \frac{\mu^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}$$

$$Z_\varphi((X_0X_1)^n) = \frac{\mu^{2n}}{4^n(2n+1)!}$$

$$\cdots$$

つまり、冪級数がアソシエータである (group-like と 3-cycle relation を満たす) ことが分かれば、幾らかの偶数ウェイトでの値、特に $\zeta_\varphi(2n)$ が自動的に μ(結合定数と呼ばれる) によって決定されてしまうのだ。これは Drinfel'd associator の場合ではリーマンゼータ関数の特殊値の証明になりうる。また、group-like と 3-cycle relation を合わせれば線形関係式も出てくるらしいのだが、2-cycle relation と違ってそれらを explicit に書き下す方法は現在知られていないようである。
さて、残るは 5-cycle relation のみとなった。5-cycle relation はアソシエータの最も本質的な部分と言っても過言ではなく、実は次が知られている。

[*9] [L] とは係数の表示が異なるため $(-1)^{\mathrm{dep}(W)}$ 倍だけずれていることに注意。

定理 3.9 (Furusho [F2, Lemma 6, Theorem 10])**.** $\varphi \in k\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ が commutator group-like であり 5-cycle relation を満たしているとする。このとき、符号の違いを除いて一意的に $\mu \in \bar{k}$ をとって、(μ, φ) が 2-cycle relation と 3-cycle relation を満たすようにできる。

5-cycle relation はその複雑さゆえに explicit に何かを書き下すことは難しい。にも関わらず、Furusho によって驚くべき結果が示されている。

定理 3.10 (Furusho [F1, Theorem 1.1])**.** commutator group-like な冪級数 φ が 5-cycle relation を満たしているとする。このとき、係数が正規化複シャッフル関係式 (Double shuffle relation) を満たすことが従う。

この定理のもう少し厳密な定式化の大雑把な説明は次の通りだ。φ に細工を施して φ_* という扱いやすい形に整え、シャッフル関係式を Δ に関する group-like 性に言い換えたように、新しい写像 Δ_* を用意し調和関係式を Δ_* に関する group-like 性に言い換える。係数がシャッフル関係式を満たすことはアソシエータの定義に含まれているから、$\Delta_*(\varphi) = \varphi_* \otimes \varphi_*$ を満たすことが正規化複シャッフル関係式を意味する。
さて、今までの話をまとめてみよう。アソシエータとは次のような条件を満たす冪級数だった。

i. 係数がシャッフル関係式を満たし、(group-like 性)
ii. シャッフル正規化操作が行え、(commutator group-like 性)
iii. Duality を満たし、(2-cycle relation)
iv. 特殊値の情報を持ち、(3-cycle relation)
v. 正規化複シャッフル関係式を満たす。(5-cycle relation)

正規化複シャッフル関係式や Drinfel'd associator のアソシエータ関係式から全ての多重ゼータ値の線形関係式が従うだろうと予想されていることを踏まえると、アソシエータとは最低でも多重ゼータ値の持つ関係式を全て備えた対象たちの母関数だと思える。そしてさらに、Drinfel'd の定理 3.2 によってそのようなものが任意の標数 0 の体上に無数に存在しているのだ！！（尤も、そのうちの幾らかは変数を定数倍することで写り合うような本質的に同じものかも知れないが）
特筆すべきことは、多重ゼータ値の観点からこれほどまでに興味深い対象であるアソシエータがどうやら全く多重ゼータ値とは関係のない文脈で定義されたものらしいということだ。なんでも Drinfel'd の量子群の研究の過程で現れたそうなのだが、生憎と不勉強ゆえに仔細を知ることは未だ叶っていない。
本稿では詳しく扱うことができなったが、アソシエータ関係式と正規化複シャッフル関係式が同値だろうと予想されており、その相応しい定式化には Grothendieck–Teichmüller 群と Double shuffle 群が現れる。また、具体的に構成されたアソシエータとして Drinfel'd associator 以外にも Furusho によって構成された p 進 Drinfel'd associator [F5] や Alekseev–Torossian associator [AT]、Deligne associator [De] やそれらのモチーフ論的持ち上げなどがあるようだが、$\mathbb{C}$ 上の退化結合子 ($\mu = 0$ でアソシエータをなすもの) の構成など未解決問題は多いようである。

謝辞

一年間を通した研究部の活動や大発表会の資料作成、また本稿の執筆にあたりましては数理科学グループのアドバイザーの方々、特に東京理科大学の川村花道氏には終始多大なご指導を賜り大変お世話になりましたので、ここに御礼申し上げます。

参考文献

[AT] A. Alekseev and C. Torossian, *Kontsevich deformation quantization and flat connections*, Comm. Math. Phys. **300** (2010), no. 1, 47–64.

[De] P. Deligne, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, in: Galois groups over Q, Springer, MSRI publications **16** (1989), 72–297; Periods for the fundamental group, Arizona Winter School 2002.

[DG] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 1–56.

[Dr] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with* Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Leningrad Math. J.**2** (1991), 829–860.

[F1] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Math. **174** (2011), 341–360.

[F2] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Math. **171** (2010), 545–556.

[F3] H. Furusho, *Four groups related to associators*, arXiv:0808.0319

[F4] H. Furusho, *On relations among multiple zeta values obtained in knot theory*, preprint 1501.06638[QA].

[F5] H. Furusho, *p-Adic multiple zeta values I. p-Adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. Math. **155** (2004), 253–286.

[GF] J. I. B. Gil and J. Fresan, *Multiple Zeta Values: From Numbers to Motives*, to appear in Clay Math. Proc.

[Go] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, arXiv:math/0202154.

[Ha] R. Harada, *KZ* 方程式と *KZ* 結合子, 第 26 回整数論サマースクール報告集 **no. 3**, 2019.

[Ho] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[S] せきゅーん, 大野関係式, はてなブログ,2018-12-28, https://integers.hatenablog.com/entry/2018/12/28/124859, 2022-02-24.

[OK] J. Okuda, 多重ゼータ値の関係式 ドリンフェルド・アソシエイタの方向から, 数理解析研究所講究録. **1549** 巻, 2007,11–30.

[Ta] たけのこ赤軍, 随伴結合子と t 進シャッフル関係式, MathWills, 2021-4-28, https://www.mathwills.com/posts/151, 2022-2-26

[Te] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[Za] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), **Vol. II**, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhauser, Basel, 1994, pp. 497–512.

[L] Z-h. Li, *Gamma series associated to elements satisfying regularized double shuffle relations*, J. Number Theory **130** (2010), 213–231.