平方数の魔方陣

「9つの異なる平方数で3×3の魔方陣が作れる$\Leftrightarrow$
$tan\theta_i \in \mathbb{Q}, tan\theta_i \neq -1,0,1,$
$sin4\theta_1 + sin4\theta_2 + sin4\theta_3 = sin4\theta_3 + sin4\theta_4 - sin4\theta_1 = 0$
をみたす$\theta_i (i=1,2,3,4)$ が存在する」を証明する.

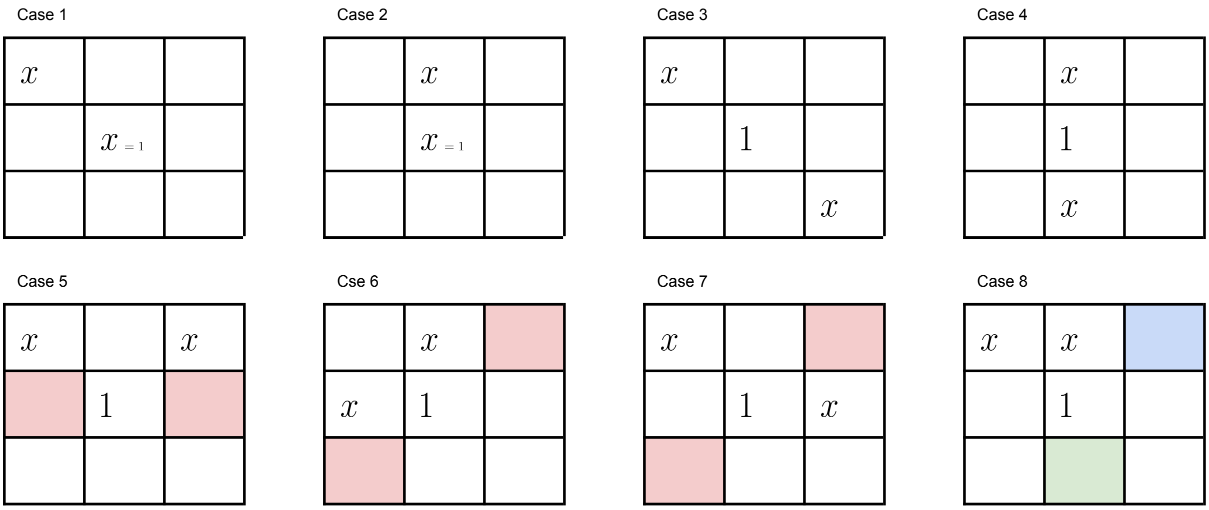
以下の数式すべてにおいて, $i=1,2,3,4$とする.
まず､「9つの異なる平方数で3×3の魔方陣が作れる$\Leftrightarrow$
9つすべてが異なる有理数の二乗で, 中央の数が1である3×3の魔方陣が作れる」
が分かる. 数字を次のようにおく.

a_1^2	a_2^2	a_3^2
b_4^2	1	a_4^2
b_3^2	b_2^2	b_1^2

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_4^2 + 1 + a_4^2 = \cdots = S$とおく.
$(a_1^2+1+b_1^2)+(a_2^2+1+b_2^2)+(a_3^2+1+b_3^2)-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=3$
より, $S=3$
よって, $a_i^2 + b_i^2 = 2$
ここで, この補題を証明する.

補題…上の図のようにすべての値が有理数の二乗で, 中央の数が1である魔方陣について,
$a_i^2 - b_i^2 \neq 0 \Leftrightarrow$魔方陣の$9$つすべての値が異なる

証明…「$a_i^2 - b_i^2 \neq 0 \Leftarrow$魔方陣の$9$つすべての値が異なる」は自明.
「魔方陣で, 値が同じ2数が存在する$\Rightarrow a_i^2 - b_i^2 = 0$となる$i$が存在する」を示す.
$a_i^2 + b_i^2 = 2$より, $a_i^2 - b_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_i^2 = b_i^2 = 1$
値が同じ2数が存在する魔方陣は, 次の8種類とその回転, 対称移動のいずれかに当てはまる.



Case $1 \sim 4$では, $x=1$であることが容易に確認できる.
Case $5 \sim 7$は, 計算をすると赤いマスの数字が1であることが分かる.
Case8では, 緑のマスが$2-x$で, 青のマスが$3-2x$である.
$3-2x, 2-x, 1, x$は等差数列をなしていて, すべて平方数である.
しかしこれが成り立つのは$x=1$のときだけである[1].
よって, 補題は示された.

$u^2+v^2=2$の有理数解は、有理数xを用いて,
$(u,v)=(\pm\frac{x^2+2x-1}{x^2+1}, \pm\frac{x^2-2x-1}{x^2+1})$ (複合任意) と表される[1].
$a_i=\frac{x_i^2+2x_i-1}{x_i^2+1}, b_i=\frac{x_i^2-2x_i-1}{x_i^2+1}$ とする.
$a_i^2+b_i^2=2$なので,
$(a_1^2-b_1^2)+(a_2^2-b_2^2)+(a_3^2-b_3^2)=0 \Leftrightarrow$
$a_1^2+a_2^2+a_3^2=3, b_1^2+b_2^2+b_3^2=3,$
$(a_3^2-b_3^2)+(a_4^2-b_4^2)-(a_1^2-b_1^2)=0 \Leftrightarrow$
$a_3^2+a_4^2+b_1^2=3, b_3^2+b_4^2+a_1^2=3,$
$a_i^2-b_i^2=\frac{8x_i(x_i^2-1)}{(x_i^2+1)^2}$ なので、$a_i^2-b_i^2=0 \Leftrightarrow x_i=-1,0,1$
さらに, $tan\theta_i=x_i$とすると, $sin4\theta_i=\frac{-4x_i(x_i^2-1)}{(x_i^2+1)^2}$ なので,
$a_i^2-b_i^2=-2sin4\theta_i$
よって,「9つの異なる平方数で3×3の魔方陣が作れる$\Leftrightarrow$
$sin(4\theta_1)+sin(4\theta_2)+sin(4\theta_3)=sin(4\theta_3)+sin(4\theta_4)-sin(4\theta_1)=0$
$(tan(\theta_i)\in\mathbb{Q}, tan(\theta_i)\neq -1,0,1)$ をみたす$\theta_i (i=1,2,3,4)$ が存在する」

参考文献

[1] 大塚美紀生, “等差数列をなす平方数について”, 早稲田数学フォーラム, 2019, http://wasmath.la.coocan.jp/arithmetic-square.pdf